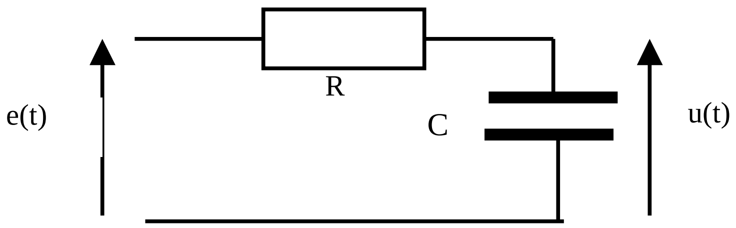
# TP n°6 : filtrage numérique.

**Buts du TP** : le but de ce sixième TP de seconde année est l'étude du bloc de filtrage numérique. Dans un premier temps, on va essayer dans ce TP de comparer un filtre analogique du premier ordre avec le filtre numérique correspondant. On fera la simulation sur un tableur de la réponse indicielle et harmonique.

## 1°) - étude du filtre analogique RC.

. On s'intéresse au circuit suivant :

R = 10 kΩ
C = 47 nF




**1°) - 1 -** Ecrire **l'équation différentielle** vérifiée par e(t) et u(t). Vérifier qu'elle se met sous la forme :

$$\tau \times \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad \text{avec } \tau = R.C$$

Calculer la valeur de la constante de temps et préciser l'ordre du circuit.

**1°) - 2 - Réponse indicielle** : on suppose que e(t) passe de la valeur 0 à la valeur +5 V à t = 0.

Ecrire alors la solution u(t) pour t > 0 et tracer l'allure des deux courbes théoriques e(t) et u(t).
Rappeler la valeur théorique du temps de réponse à 5% et une méthode graphique pour trouver la valeur de la constante de temps $\tau$.

**1°) - 3 - Réponse harmonique** : on suppose que e(t) est une tension sinusoïdale d'amplitude 1 V et de fréquence variable.

Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe : $\underline{T} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}}$ où $\underline{u}$ et $\underline{e}$ sont les grandeurs complexes associées à u(t) et e(t).

Montrer que $\underline{T}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{T} = \frac{1}{1 + j \times (\frac{f}{f_0})}$ où $f_0$ s'exprime en fonction de R et C.

Calculer $f_0$ et montrer que ce circuit constitue un filtre du 1er ordre passe-bas de fréquence de coupure $f_0$.
Donner la relation entre $f_0$ et $\tau$.

***Manipulations :***

- Mettre en entrée du montage un signal carré [0-5 V] avec une fréquence telle qu'on puisse visualiser entièrement la réponse indicielle (le condensateur doit avoir le temps de se charger complètement).
Relever les oscillogrammes de e(t) et u(t) en dilatant au maximum les courbes. (utiliser le réglage fin).
Mesurer la valeur de la constante de temps $\tau$ ainsi que le temps de réponse à 5%.

- Mettre en entrée du montage une sinusoïde d'amplitude 1 V et de fréquence variable et tracer la courbe de gain du montage. En déduire la fréquence de coupure pratique et comparer avec $f_0$.

## 2°) - – obtention et étude du filtre numérique par son équation de récurrence..

**2°) - 1 -** On voudrait obtenir l'équation de récurrence du filtre numérique correspondant au filtre analogique précédent. On part donc de l'équation différentielle : $\tau \times \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$

Les signaux sont échantillonnés et on note : Yn = y(t = n.$T_E$) et Xn = x(t = n.$T_E$) où $T_E$ est la période d'échantillonnage.

On suppose que y(t) ne varie pas trop rapidement entre deux échantillons, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{Yn - Yn_{-1}}{T_E}$$

Montrer alors que l'équation de récurrence du filtre peut s'écrire :

$$\boxed{Yn = \frac{\alpha}{1+\alpha} \times Yn_{-1} + \frac{1}{1+\alpha} \times Xn} \qquad \text{avec : } \alpha = \tau \times f_E$$

On a alors crée un filtre numérique qui donne la même équation différentielle que le filtre analogique de départ.

**2°) - 2 -** **Réponse indicielle** : premier programme.

**a)** On veut créer un premier programme (appelé filtrage_numerique1) avec le tableur d'open office qui nous permette de tracer la réponse impulsionnelle et indicielle du filtre numérique.
Les échantillons provenant de x(t) , signal impulsion ou échelon, sont tous à 5.

Le cahier des charges est le suivant :

- on veut, sur la feuille 1 du tableur, pouvoir écrire l'équation de récurrence du filtre numérique en choisissant la valeur des coefficients du filtre.
- on veut, toujours sur la feuille 1, tracer la suite des échantillons {Yn} pour la réponse impulsionnelle et indicielle.
- le nombre d'échantillons représentés sera N tel que N = 80
- les calculs seront effectués sur la feuille 2.

Effectuer le programme et l'expliquer devant le professeur.

**b)** Faire fonctionner le programme sur le filtre du 2°) – 1 avec : $T_E = 0{,}5 \cdot \tau$
Calculer les coefficients en calculant d'abord la valeur de $\alpha$ et donner l'équation de récurrence du filtre.
Imprimer les réponses et mesurer pour quel échantillon on atteint le temps de réponse à 5%.
Comparer avec la valeur attendue.

**c)** Même question si $T_E = 0{,}25 \cdot \tau$

**d)** on veut étudier le filtre dont la transformée en Z est : $H(Z) = \frac{a.Z^2 + b.Z + c}{Z^2}$

avec a = 0,2 b = -1,6 et c = -0,6
Trouver l'équation de récurrence du filtre et vérifier que ce filtre est bien non-récursif.
Compléter le tableau pour trouver la réponse indicielle du filtre :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Xn | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Yn | | | | | | |

Vérifier cette réponse à l'aide du programme effectué précédemment.

**e)** on considère le filtre dont l'équation de récurrence est :
Yn = 0.95. Yn-1 + 1 . Xn + 2. Xn-1
Vérifier que ce filtre est bien récursif.
Ce filtre est-il toujours stable ? (pour répondre à cette question, on pourra utiliser le programme)

Compléter le tableau pour trouver la réponse indicielle du filtre :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Xn | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Yn | | | | | | |

Vérifier cette réponse à l'aide du logiciel.

Remplacer la valeur 0.95 devant Yn-1 par la valeur 1.05 et revoir la stabilité du filtre

**2°) - 3 -** **Réponse harmonique** : second programme.

On veut utiliser un second programme (appelé filtre_numerique2) avec le tableur d'open office qui nous permette de tracer la réponse du filtre numérique à une entrée impulsion, échelon ou sinusoïdale.

Le programme est déjà crée. On y trouve 3 feuilles :
- une première feuille explicative.
- une seconde feuille d'entrées de données et de tracés graphiques.
- une troisième feuille de calculs.

Lire la page de présentation du programme.

**Expérimentation du programme :**

**a)** on considère le filtre étudié au 2°)-1 et on sait que, $\tau$ = R . C = 0,47 ms.
Calculer alors $f_E$ (fréquence d'échantillonnage) pour avoir la condition : $T_E = 0,5 . \tau$
Appliquer cette condition dans la case prévue pour $f_E$ .
Appliquer alors les coefficients devant Xn et Yn-1.

Relever le gain du montage pour des valeurs de f dans le tableau ci-dessous :

| f en Hz | 200 | 300 | 400 | 500 | 700 | 1000 | 1200 | 1500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gain en dB | | | | | | | | |

Pourquoi ne doit-on pas dépasser f = 2 . $f_E$ ?

Tracer la courbe : G(f) et en déduire la nature du filtre et la fréquence de coupure.

**b)** on considère le filtre dont l'équation de récurrence est :

**Yn = 0.5 Xn – 0.5 . Xn-2 + 1.5 . Yn-1 – 0.9 . Yn-2**

Ce filtre est-il récursif ou non-récursif ?
Est-il stable ? (justifier à l'aide du programme)
Trouver la fonction de transfert en Z de ce filtre à l'aide de l'équation de récurrence.

On veut étudier la réponse harmonique pour $f_E$ = 5 kHz.
Pour f variant de 300 Hz à 1300 Hz, relever les valeurs du gain de ce montage.
Tracer G(f) et préciser le type de filtre et la bande passante.

| f en Hz | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| amplitude de $Y_{CNA}$ | | | | | | | | | | | |

Quelle est la fréquence f à ne pas dépasser ?

(documents open office : filtrage_numérique1 et filtrage_numérique2)