T.P. numéro 2 : *système du premier ordre : réponse fréquentielle.*

Buts du TP : le but du TP n°2 est l'étude générale des systèmes du premier ordre alimentés par un signal sinusoïdal (réponse fréquentielle). Cette étude générale est illustrée par trois applications pratiques tirées de l'électricité et de la mécanique.

1°) - Introduction.

Un système physique du premier ordre est un système dont la relation entrée e(t) → sortie X(t) peut être décrite par une équation différentielle du premier ordre.

Si on suppose que le signal d'entrée e(t) est un signal sinusoïdal de fréquence , et comme le système est linéaire, tous les signaux (entrée, sortie, …) sont sinusoïdaux de fréquence f. **Ils ne différent seulement par leurs amplitudes et par un éventuel déphasage entre les signaux.**

On adopte donc la notation complexe suivante pour représenter les signaux :

- les signaux de type $s(t) = S_{max} . \cos(\omega.t + \varphi)$ seront représentés par le complexe $\underline{s} = [S_{max} ; \varphi]$ où S_{max} sera le module de $\underline{s}$ et φ l'argument de $\underline{s}$.
- on ne représente plus la fonction cos (ω.t) puisqu'on sait qu'elle est présente dans tous les signaux.

Montrer alors que, dans ces conditions, l'équation différentielle de départ est remplacée par un calcul sur des additions de nombres complexes représentant les différents signaux. On pourra commencer par montrer que la dérivée se transforme en une multiplication par j.ω, j étant le nombre complexe dont le carré vaut : $j^2 = -1$.

On aura également souvent besoin des formules de mathématiques suivantes : si le nombre complexe $\underline{s}$ peut s'écrire : $\underline{s} = a + j.b = [S_{max} ; \varphi]$ où a est la partie réelle de $\underline{s}$ et b sa partie imaginaire, donner les quatre relations entre a, b, S_{max} et φ, sachant que φ est déterminé à π près.

2°) - Fonction de transfert.

2 - 1. définition et utilité.

On considère un système avec une entre e(t) sinusoïdale de fréquence f et une sortie s(t). On sait que la relation entrée-sortie est du premier ordre.

e(t) ⟶ **système 1er ordre.** ⟶ s(t)

On voudrait connaître les différences entre e(t) et s(t) :

- on sait que la forme de e(t) et de s(t) est commune : sinusoïdes de fréquence f.
- les seules différences entre e(t) et s(t) sont l'amplitude et un éventuel déphasage.
- ces deux paramètres dépendent a priori de la seule variable commune, à savoir la fréquence f.

On définit donc la fonction de transfert complexe comme le rapport $\underline{H}$ entre les nombres complexes $\underline{s}$ et $\underline{e}$, représentants les signaux s(t) et e(t).

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}}$$

Montrer qu'avec $\underline{H}$, on dispose des deux paramètres intéressants :
- montrer que le module de $\underline{H}$ donne le rapport des amplitudes de s(t) et e(t).
- montrer que l'argument de $\underline{H}$ donne le déphasage entre s(t) et e(t).

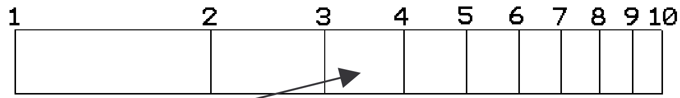
Pour connaître tout du système, il suffira donc d'étudier les deux expressions suivantes, en fonction de f :

$$\boxed{|\underline{H}| \text{ et } \arg(\underline{H})}$$

2 - 2. représentation de H : diagramme de Bode.

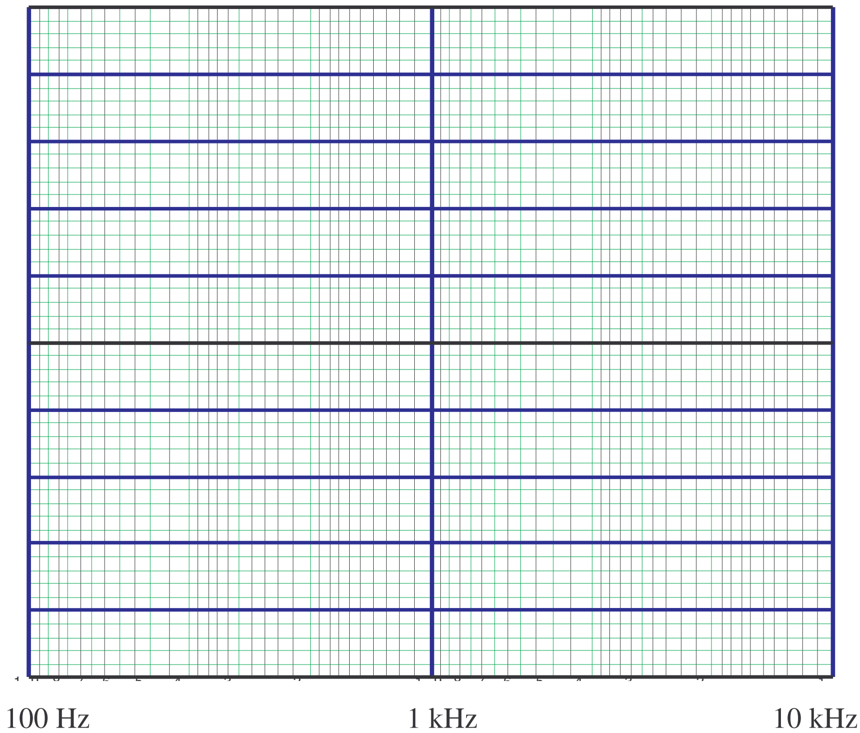
En fait, comme on veut représenter les deux expressions précédentes en fonction de f pour une grande plage de fréquence, on préfère utiliser une fonction qui compresse les grands chiffres, de façon à pouvoir représenter $\underline{H}$ sur plusieurs décades de fréquence.
Par exemple, pour représenter une fonction avec f variant de 100 Hz à 100 kHz, on peut faire deux choix possibles :

- soit on choisit comme échelle 1cm → 5 kHz et on voit mal ce qui se passe entre 100 Hz et 1 kHz.
- soit on choisit une échelle plus petite 1cm → 100 Hz et on ne peut pas alors représenter la courbe jusqu'à 100 kHz !



On change alors de variable : f → log(f).
On fait même mieux : on représente f sur une feuille de papier semi-logarithmique. C'est une feuille où la fonction log est intégrée dans le quadrillage : les carreaux sont plus grands au départ et plus on augmente f, plus le quadrillage diminue, jusqu'à la prochaine décade.

Exemple de feuille semi-logarithmique :



De plus, $|\underline{H}|$ représente le rapport entre l'amplitude de s(t) et l'amplitude de e(t) et on aimerait mieux visualiser les rapports, en particulier si la sortie est 2 fois plus petite que l'entrée, ou 10 fois plus petite ou 100 fois.

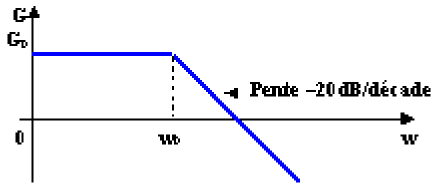
On préfère donc tracer la fonction G = $20 \cdot \log(|\underline{H}|)$ plutôt que $|\underline{H}|$ car la fonction log dilate les intervalles si le chiffre est plus petit que 1. On donnera à la fonction G le nom de GAIN et on lui donne l'unité décibel (dB)

On tracera donc les deux fonctions : $G = 20 \cdot \log(|\underline{H}|)$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ en fonction de f sur une feuille de papier semi-logarithmique. Ces deux courbes constituent le diagramme de BODE du système.

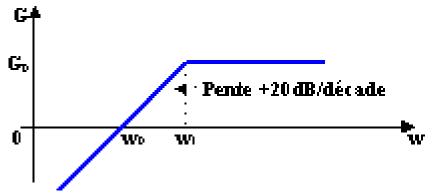
2 - 3. types de filtres et fréquence de coupure.

Les systèmes dont le comportement varie avec la fréquence sont appelés des filtres. Lorsqu'on tracera le diagramme de BODE de gain des filtres, on trouvera souvent les quatre types de filtres suivants, qui correspondent à quatre besoins différents en matière de filtrage du signal d'entrée :

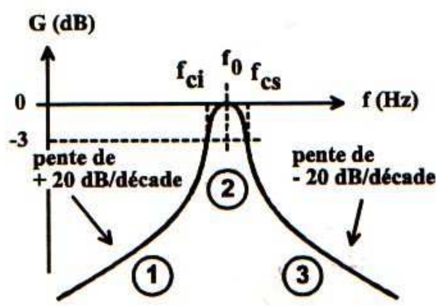
- on a besoin de couper les signaux de haute fréquence (ex : les parasites) et de garder le signal basse fréquence d'utilisation. On va donc générer un filtre dont le gain est constant jusqu'à une certaine fréquence et qui décroît ensuite avec f : on l'appellera filtre passe-bas. Ses paramètres essentiels sont le gain dans la bande où le signal de sortie n'est pas coupé, la fréquence à partir de laquelle on va considérer que le filtre commence à couper le signal d'entrée (voir par la suite la définition de la fréquence de coupure) et la façon dont le filtre coupe le signal d'entrée (on mesurera ce paramètre en mesurant la pente de la courbe de gain en dB/décade de f) :



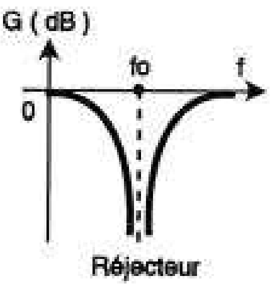
- on a besoin au contraire de couper un signal basse fréquence (par exemple un signal constant ou un signal à la fréquence du réseau f = 50 Hz) et de garder un signal dont la fréquence est supérieure. On va donc générer un filtre dont le gain est constant à partir d'une certaine fréquence et qui décroît ensuite si f décroît : on l'appellera filtre passe-haut. Ses paramètres essentiels sont le gain dans la bande où le signal de sortie n'est pas coupé, la fréquence à partir de laquelle on va considérer que le filtre ne coupe plus le signal d'entrée et la façon dont le filtre coupe le signal d'entrée en dB/décade de f :



- on a besoin d'isoler une certaine partie d'un signal dans une bande de fréquence et de couper toutes les autres composantes du signal d'entrée. On va donc générer un filtre dont le gain est constant dans une bande de fréquence et qui coupe le signal d'entrée avant et après deux fréquences définissant cette bande de fréquence. On l'appellera filtre passe-bande. Ses paramètres essentiels seront le gain dans la bande de fréquence où le signal d'entrée n'est pas coupé, les deux fréquences définissant cette bande et la façon dont le filtre coupe le signal e(t) en dB/décade de f :



- on a besoin de couper tous les signaux dont la fréquence se trouve dans une certaine bande (c'est le contraire du filtre passe-bande). On va donc générer un filtre appelé filtre réjecteur de bande :



Pour définir précisément la (ou les) fréquence à partir de laquelle le signal d'entrée est coupé, on se met d'accord sur la définition suivante : la fréquence de coupure est la fréquence fc pour laquelle la puissance disponible en sortie est égale à la moitié de la puissance de sortie maximale. Comme la puissance électrique est souvent proportionnelle au carré des amplitudes des signaux (se rappeler la formule pour une résistance R, $P = \frac{U^2}{R}$), on démontre que cela revient à écrire : la fréquence de coupure est la fréquence fc pour laquelle : $|\underline{H}|^2 = \frac{|\underline{H}|^2_{max}}{2}$ ou également :

$$\boxed{|\underline{H}(fc)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Montrer qu'on peut trouver fc à partir du diagramme de BODE du gain en faisant : $\boxed{\mathbf{G(fc) = Gmax - 3\ dB}}$

2 - 4. diagramme asymptotique.

Le diagramme asymptotique est un diagramme de BODE simplifié formé de morceaux de droites et qui est égal au diagramme de BODE réel sous certaines conditions : donnons un exemple pour mieux comprendre.

Imaginons qu'on ait trouvé la fonction de transfert complexe du filtre sous la forme : $\underline{H} = \frac{k}{1 + j.\frac{f}{f_0}}$

où k et f_0 sont deux constantes connues.

Exprimer successivement $|\underline{H}|$ puis la fonction G en dB en fonction de f.
Montrer que si f << f_0, la fonction G peut s'écrire plus simplement.
Montrer que si f >> f_0, la fonction G peut s'écrire : $G(f) \approx 20.\log(k) - 20.\log(f/f_0)$
Montrer que cette dernière expression correspond à une droite (attention, la variable est log(f) !!) dont la pente est de –20 dB/décade (cela veut dire que G descend de 20 dB si f augment d'une décade).

On trace ainsi ces deux droites sur la feuille de papier semi-logarithmique et elles représentent G(f) aux deux conditions f << f_0 et f >> f_0.

3°) - Manipulations.

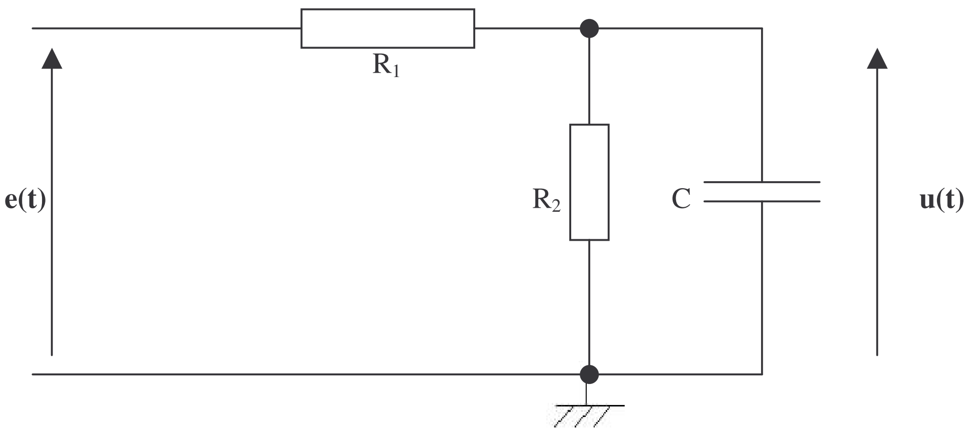
Trois manipulations sont proposées dans ce TP :

- deux manipulations sur des circuits électriques
- une manipulation sur la vitesse d'un moteur à courant continu.

D'autres manipulations sont possibles dans d'autres domaines de la physique. J'ai fourni quelques liens internet pour y accéder.

2 - 1. manipulation n°1 : circuit RC.

On considère le circuit suivant :



$R_1 = 1\ k\Omega$
$R_2 = 2{,}2\ k\Omega$
$C = 10\ nF$

2 - 1 -a Calculer la fonction de transfert complexe, c'est à dire le rapport entre les deux nombres complexes e et u associés aux grandeurs réelles e(t) et u(t).

2 - 1 -b Mettre cette fonction de transfert (que l'on notera $\underline{T}=(\frac{\underline{u}}{\underline{e}})$) sous la forme : $\underline{T}=\frac{k}{1+j\times(\frac{f}{f_0})}$

Pour cela, il suffit de reprendre l'expression de T trouvée au 1) et d'exprimer k ainsi que f_0 en fonction de R_1, R_2 et C.

2 - 1 -c Exprimer alors le module et l'argument (déphasage) de $\underline{T}$, que l'on notera respectivement T et arg($\underline{T}$).

2 - 1 -d Donner les valeurs de T et arg($\underline{T}$) pour f = 0 et $f \to +\infty$. Donner le nom et l'ordre de ce filtre.

2 - 1 -e A quelle fonction est équivalente la courbe de gain si $f \to 0$ et si $f \to +\infty$? Tracer alors le diagramme de Bode asymptotique du gain du filtre sur papier semi-logarithmique.

2 - 1 -f Imposer une tension d'entrée e(t) sinusoïdale de valeur maximale U_e = 3V environ et de fréquence f variable.

Que vaut la valeur maximale de la tension de sortie U_s ainsi que le déphasage de la sortie sur l'entrée pour les valeurs de f suivantes : f = 100 Hz, f = 1 kHz, f = 10 kHz, f = 100 kHz et f = 1 MHz.

On mesurera ces valeurs approximativement, le but étant de déterminer si le filtre donne bien une réponse conforme à la théorie.

2 - 1 -g Remplir alors le tableau suivant :

f	100 Hz	1 kHz	10 kHz	15 kHz	20 kHz	21 kHz	22 kHz
Us							
$\Phi(\phi)$							
G(f)							

f	23 kHz	24 kHz	25 kHz	30 kHz	50 kHz	100 kHz	200 kHz
Us							
$\Phi(\phi)$							
G(f)							

où : - U_s est la valeur maximale de la tension de sortie.
- $\Phi(f)$ correspond au déphasage de la tension de sortie par rapport à celle d'entrée.
- $G(f)$ est la fonction : $G(f) = 20*\log(U_s / U_e)$

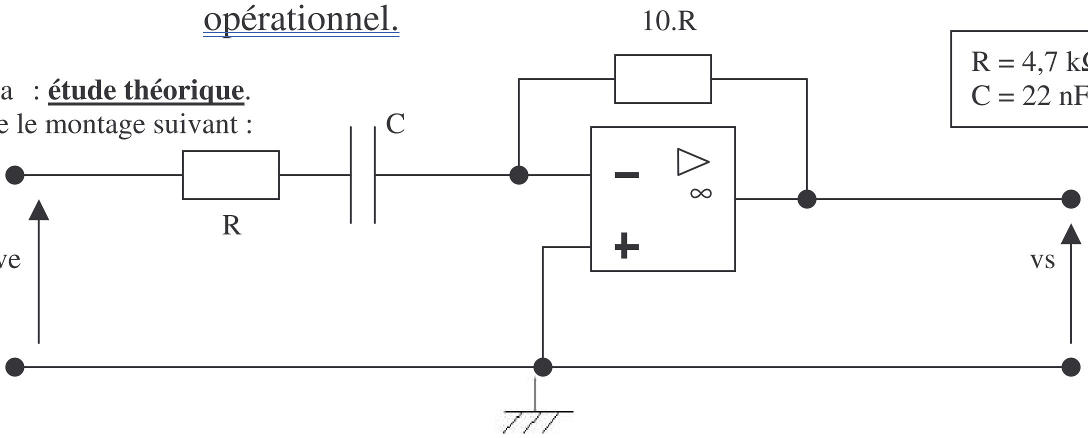
2 - 1 -h tracer sur une feuille de papier semi-logarithmique les fonctions G(f) et Φ(f).
Choisir correctement les échelles pour avoir la courbe la plus grande possible.
On tracera la fonction G(f) sur la même feuille que le diagramme de Bode asymptotique.

2 - 1 -i On définit la fréquence de coupure comme la fréquence pour laquelle la fonction G(f) vaut sa valeur maximale (notée G_{max}) moins 3 soit : $G(f) = G_{max} - 3$ dB.
Trouver, à partir de votre graphique, la fréquence de coupure pratique.
Calculer également la fréquence de coupure théorique et comparer.

2 - 2. manipulation n°2 : circuit du premier ordre avec un amplificateur opérationnel.

R = 4,7 kΩ
C = 22 nF

2 - 2 -a : **étude théorique**.
On considère le montage suivant :



Exprimer la fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{vs}}{\underline{ve}}$ où $\underline{vs}$ et $\underline{ve}$ sont les grandeurs complexes associées à vs(t) et ve(t).

Montrer que $\underline{H}$ peut se mettre sous la forme classique : $\underline{H} = \dfrac{-k.j.\dfrac{f}{f_0}}{1+j.\dfrac{f}{f_0}}$

Exprimer les deux paramètres k et f_0 en fonction de R et C. Calculer leur valeur numérique.

Exprimer les deux fonctions $G(f) = 20 . \log(|\underline{H}|)$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ en fonction de f et f_0.
Trouver les limites de ces deux fonctions si $f \to 0$ et si $f \to \infty$. En déduire la nature et l'ordre du filtre.

Tracer une feuille de papier semi-logarithmique le diagramme de Bode asymptotique pour f variant de 100 Hz à 10 kHz (3 décades).
Calculer la valeur de G(f) pour $f = f_0/2$, $f = f_0$ et $f = 2.f_0$. Tracer alors le diagramme de Bode théorique complet sur la même feuille. Donner la fréquence de coupure théorique fc et le gain maximal dans la bande passante.

2 - 2 -b : **tracé du diagramme de Bode pratique** :

ve(t) est un signal sinusoïdal d'amplitude 1 V.
Relever les valeur de l'amplitude de vs(t) et du déphasage de vs(t) par rapport à ve(t) pour des valeurs de f comprises entre 100 Hz et 10 kHz.
Tracer alors le diagramme de Bode pratique sur une feuille de papier semi-logarithmique.
Rappeler la façon de trouver la fréquence de coupure à partir du diagramme précédent. Effectuer l'opération et comparer à la valeur théorique. Expliquer l'origine des différences possibles.

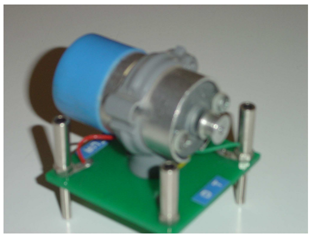
2 - 2 -c : **élimination d'une composante continue** :

On place à l'entrée de ce filtre un signal : ve(t) = 2 + 1. sin(6000.π.t)
Que devrait-on obtenir théoriquement ? Effectuer l'opération et vérifier que la composante continue de 2 V a bien disparu. Mesurer l'amplification du signal sinusoïdal et comparer à la valeur théorique attendue.

Même opération pour le signal suivant : ve(t) = 2 + 1. sin(2000.π.t). Quel changement observez-vous ?

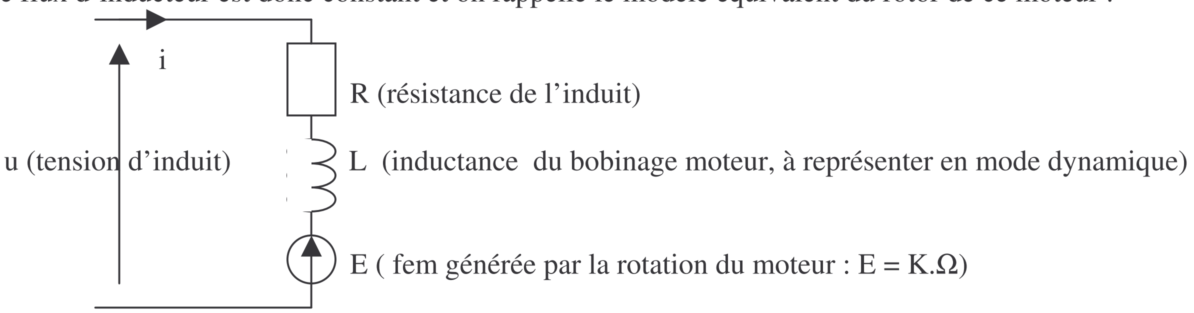
2 - 3. manipulation n°3 : courant pour un moteur à courant continu alimenté par un hacheur.

2 - 3 -a : **présentation du problème** :



Le moteur à courant continu à aimants permanents utilisé est le même que celui du TP n°1 :

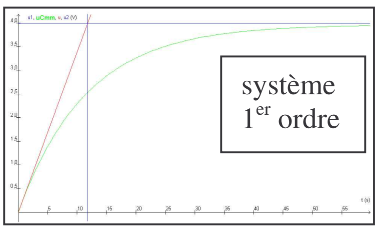
Le flux d'inducteur est donc constant et on rappelle le modèle équivalent du rotor de ce moteur :



En régime dynamique, écrire la relation entre u(t), i(t) et E aux bornes de l'induit.
On supposera par la suite que **E est constante** : cela revient à dire que la vitesse de rotation Ω est constante, puisque la constante de temps mécanique (temps que met la machine à changer de vitesse) est beaucoup plus importante que la constante de temps électrique (temps que met le courant à changer de valeur).
Cette hypothèse devra être vérifiée par la suite.

Si u(t) est une grandeur sinusoïdale, transformer le schéma avec les notations complexes et trouver la relation entre les grandeurs complexes $\underline{u}$ et $\underline{i}$ associées à u(t) et i(t). Montrer que : $\boxed{\underline{i} = (\underline{u} - E) \times \frac{1}{1 + j.\frac{\omega}{\omega_0}}}$ avec : $\omega_0 = \frac{R}{L}$

Mesurer la valeur de ω_0 en utilisant le TP n°1 : la constante de temps électrique du bobinage du moteur à courant continu est : $\tau = \frac{L}{R}$. On alimente donc le moteur par un signal u(t) carré [0-5 V] en maintenant le moteur à l'arrêt.
On a donc E = 0 et le système est du premier ordre avec une réponse de ce type :

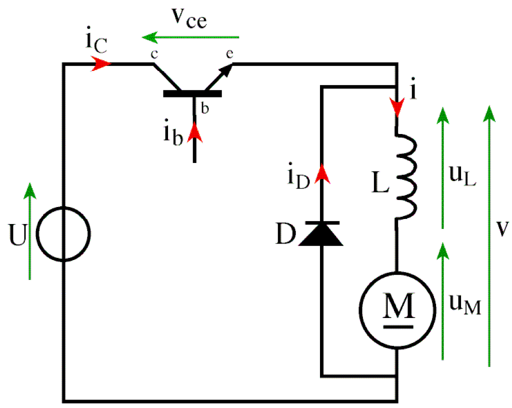


On mesure la constante de temps de ce système en utilisant une des deux méthodes vues dans le TP n°1.

2 - 3 -b : **étude du filtre** : étudier le filtre dont la fonction de transfert complexe est : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j.\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Donner le type du filtre et son ordre, sa fréquence de coupure et tracer l'allure de son diagramme asymptotique.

2 - 3 -c : **étude du montage hacheur série** : l'induit du moteur à courant continu est alimenté par un montage à transistor dont le schéma est le suivant :



U est une tension continue de U = 15 V
On alimente le transistor par un signal e(t) créneau [0-5V] avec une résistance sur la base de façon à ce que :

- si e(t) = 0 V, ib = 0.
- si e(t) = 5 V, ib est supérieur au courant de saturation.

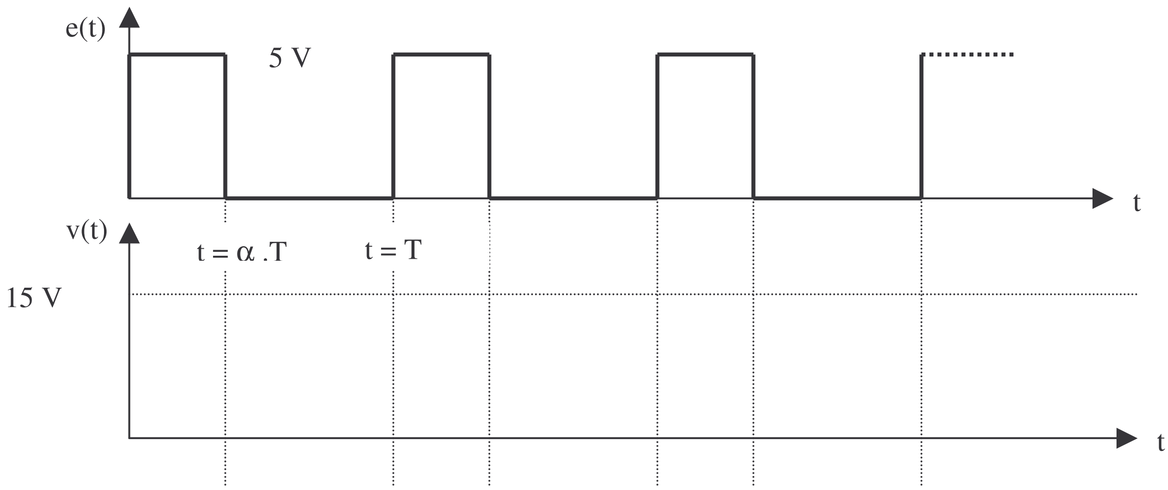
Compléter alors les états du transistor :

- si e(t) = 0, ic = …
- si e(t) = 5 V, Vce = …

Le courant dans une bobine peut-il changer brusquement ? Pourquoi ?
En déduire que :

- le courant passe par le transistor et la diode est bloquée si e(t) = 5 V .
- le courant passe par la diode et le transistor est bloqué si e(t) = 0V.

En déduire alors les valeurs prises par la tension v(t) aux bornes du moteur selon les valeurs de e(t) :



On note F = (1/T) la fréquence du signal e(t) et de v(t). On montre alors que le signal v(t) peut être décomposé en signaux sinusoïdaux de la façon suivante :
v(t) = V0 + V1. sin(2.π.F.t) + V2. sin(4.π.F.t) + V3. sin(6.π.F.t) + V4. sin(8.π.F.t) + ...

V0 est la valeur moyenne de v(t) : exprimer-la en fonction de U et de α.
Le signal V1. sin(2.π.F.t) est appelé le fondamental de v(t).
Le signal V2. sin(4.π.F.t) est appelé le harmonique de rang 2 de v(t) car sa fréquence est le double de celle de v(t).

Les amplitudes des différents harmoniques de v(t) peuvent être calculés :

- par des formules de type intégrale. (coefficients de la série de Fourier)
- à l'aide logiciels spécialisés.

2 - 3 -d : **moteur alimenté par un hacheur série** :

On alimente le moteur par le hacheur série. On rappelle qu'on considère que la vitesse est constante et que la relation entre le courant et la tension est, en notation complexe : $\boxed{\underline{i}=(\underline{v}-E)\times\frac{1}{1+j.\frac{\omega}{\omega_0}}}$ avec : $\omega_0=\frac{R}{L}$

A l'aide de tout ce qui a été vu auparavant, donner la valeur minimale de F pour que le courant i(t) soit considéré comme continu **lorsque le moteur est à l'arrêt** et que la valeur du rapport cyclique α est de 0,75.

On pourra commencer par calculer V0, et considérer qu'une composante est négligeable devant une autre si le rapport des amplitudes est inférieur à 1 %.

Effectuer alors le montage complet avec α = 0,75, F = 10 kHz, U = 15 V et T un transistor NPN 1711.
Visualiser le courant i(t) dans l'induit du moteur : est-il continu ?
En maintenant α à sa valeur précédente, diminuer la fréquence et expliquer les changements sur la forme du courant.

En donnant à F une valeur suffisante pour que i(t) soit continu, diminuer la valeur de α et expliquer ce qui se passe.

4°) - Simulations.

Pour simuler la réponse d'un circuit du premier ordre à un signal d'entrée, on peut utiliser une animation (applet) en JAVA.
J'ai retenu l'applet de Geneviève TULLOUE (www.sciences.univ-nantes.fr\physique\perso\gtulloue\index.html)

J'ai donc crée un fichier html tiré de celui de G.TULLOUE pour les systèmes du premier ordre : simu_premier_ordre
On peut y placer un signal d'entrée sinusoïdal et faire varier les paramètres du filtre pour trouver la forme du signal de sortie.
J'ai crée un second fichier .html plus spécifique consacré aux systèmes du premier ordre alimentés par un signal sinusoïdal : sinu_1ordre_sinus