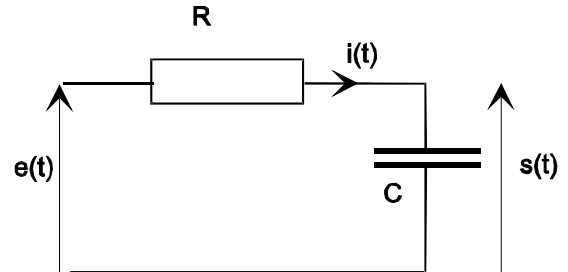
**Exercices du chapitre 3 : identification de systèmes****1°) - utilisation des transformées de Laplace**

Soit le circuit élémentaire RC ci-contre.

Conditions initiales: pour $t < 0$, $e=0$, $s=0$, $i=0$.

- Etablir l'équation différentielle de $s(t)$.
- Déterminer la transmittance $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ à partir des impédances de Laplace.
- Refaire le même travail en utilisant l'équation différentielle;
- à l'instant $t=0$, on applique un échelon de tension: $e(t) = E$ pour $t \geq 0$.



Déterminer $S(p)$ et $I(p)$.

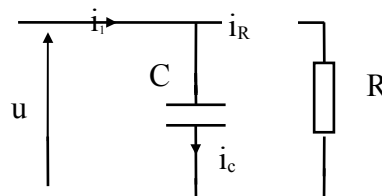
- en déduire, en utilisant les théorèmes des valeur initiale et finale, les valeurs suivantes: $i(0^+)$, $s(0^+)$, $i(\infty)$, $s(\infty)$.

Retrouver ces limites par de simples considérations physiques.

- à partir de $S(p)$ et $I(p)$, déterminer et tracer $s(t)$ et $i(t)$.
- $e(t)$ est à présent sinusoïdale, de fréquence f . Déterminer la fonction de transfert isochrone (en régime harmonique) du circuit et tracer son diagramme de Bode asymptotique.

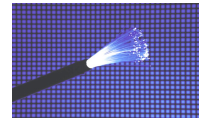
2°) - identification d'un système du premier ordre (BTS IRIS 2005)**A) ANALOGIE ENTRE UN SYSTEME ELECTRIQUE ET UN SYSTEME HYDRAULIQUE**

1) Condensateur en parallèle sur une résistance :



Tous les signaux sont nuls avant l'instant $t = 0$.

A cet instant i_1 passe de 0 à I_1 et demeure constant ensuite (le générateur produisant ce courant n'est pas représenté sur le schéma ci-dessus).



- exprimer i_R en fonction de u et R et i_C en fonction de C et de la dérivée du/dt .
- en déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
- montrer alors que : $u(t) = R \cdot I_1 \times (1 - \exp(-\frac{t}{R \cdot C}))$
- à l'instant $t = t_1$, $i_C = i_R$. Exprimer $u(t_1)$ en fonction de R et I_1 .
- en déduire t_1 en fonction de R et de C .

2) Le système hydraulique représenté ci dessous comporte un réservoir de section constante (S en m^2).

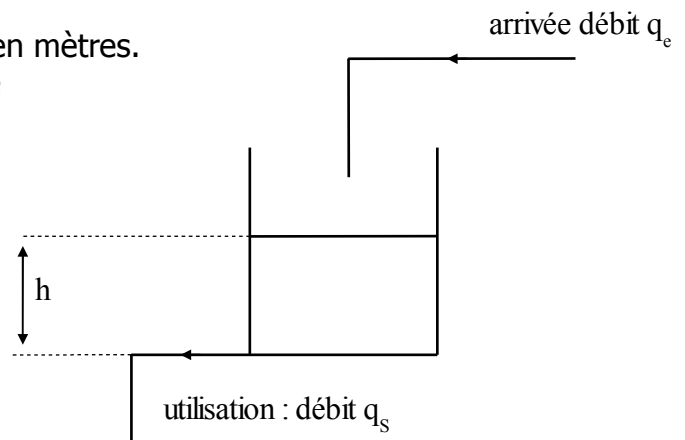
h est la hauteur d'eau dans le réservoir exprimée en mètres.

Il comporte une arrivée d'eau de débit q_e et une sortie d'eau de débit q_s supposée proportionnelle à h .

q_e et q_s sont exprimés en $m^3 \cdot s^{-1}$.

Le système est analogue au système électrique précédent et si on remplace i_1 par q_e , i_R par q_s , u par h on trouve une équation différentielle semblable à la précédente :

$$q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$



a) Quelle est l'unité de K ?

Le réservoir est vide et les 2 débits nuls jusqu'à l'instant $t = 0$ où on établit le débit $q_e(t) = Q_0$, qui demeure constant ensuite.

b) déduire de l'étude du circuit électrique précédent, par analogie, l'expression de $h(t)$ pour $t > 0$.

c) exprimer la hauteur atteinte par l'eau dans le réservoir après stabilisation.

d) en exploitant le résultat de la question A-1-c, quel est, en fonction de K et S , le temps t_1 mis pour atteindre la moitié de cette hauteur limite.

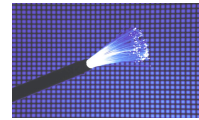
3°) - **identification d'un système du premier ordre.**

Moteur en régime transitoire

La fréquence de rotation $n(t)$ du moteur à courant continu dépend à chaque instant t de la tension $u(t)$ appliquée à l'induit de ce moteur.

Dans ce qui suit, on exprime n en $tr \cdot \min^{-1}$, u en V et le temps t en s .

On note respectivement $N(p)$ et $U(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs temporelles $n(t)$ et $u(t)$.



Le comportement dynamique du moteur est modélisé par la transmittance isomorphe $M(p)$

telle que :

$$M(p) = \frac{N(p)}{U(p)} = \frac{120}{\pi \cdot (1 + 0.05 \cdot p)}$$

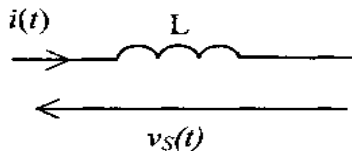
a) Quel est l'ordre du système modélisé par cette transmittance $M(p)$? Citer les deux paramètres permettant de caractériser un système de cet ordre et donner leurs valeurs numériques pour le système donné.

b) Déduire de la fonction $M(p)$ l'équation différentielle liant $n(t)$ et $u(t)$. Préciser la valeur numérique de la constante de temps τ_m du moteur.

4°) - identification d'un système du second ordre.

Le « moteur radial » est une simple bobine dans laquelle on injecte un courant $i(t)$. Cette bobine, placée dans le champ magnétique d'un aimant permanent fixe, est soumise à des forces de Laplace d'intensité : $F = \lambda \cdot i$. Dans cette formule, λ est une constante. Sous l'effet de ces forces, la bobine se déplace et permet à la tête de lecture de suivre la piste.

a) La bobine est assimilable à une inductance pure de valeur L .



- Quelle est la relation entre les valeurs instantanées $v_s(t)$ et $i(t)$?
- En déduire la relation entre $V_s(p)$ et $I(p)$, transformées de Laplace de $v_s(t)$ et $i(t)$ dans le cas où : $i(0^+) = 0$.

b) La loi fondamentale de la dynamique permet d'écrire la relation suivante :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + k x(t) = \lambda i(t)$$

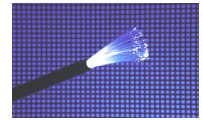
Dans cette équation, on désigne par $x(t)$ la position du faisceau laser par rapport au centre du disque et par m la masse de l'équipage mobile, f le coefficient de frottement et k le coefficient de raideur du ressort de rappel.

Les coefficients m , f , k et λ sont des constantes positives.

On note $V_s(p)$, $X(p)$, $I(p)$ les transformées de Laplace de $v_s(t)$, $x(t)$, $i(t)$.

Montrer que l'expression de la transmittance opérationnelle $H(p)$ définie par $H(p) = \frac{X(p)}{I(p)}$ peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + a \cdot p + b \cdot p^2}$$



En déduire les expressions des paramètres H_0 , a et b en fonction de m , f , k et λ .

- c) A l'aide des questions précédentes, déterminer la transmittance du « moteur radial » :

$$H_M(p) = \frac{X(p)}{V_S(p)}$$

5°) - identification d'un système du second ordre.

B-3 Etude d'un système en boucle fermée

Pour évaluer les performances d'un asservissement, on a relevé la réponse indicielle du système en boucle fermée.

Les questions suivantes reposent sur l'exploitation du relevé de la position verticale réelle $x(t)$ de la colonne du robot lorsque la consigne d'entrée $X_c(t)$ est un échelon unité.

B-3-1 Indiquer deux propriétés graphiques qui permettent d'affirmer que le système en boucle fermée n'est pas du premier ordre.

B-3-2 A partir du tracé de la réponse indicielle, le système en boucle fermée peut être identifié à un système typique du second ordre de transmittance :

$$H(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

B-3-2.1. Déterminer la valeur de la transmittance statique K . Justifier la réponse.

B-3-2.2. Mettre en évidence sur la **figure 1** les constructions permettant de déterminer le temps $tr_{5\%}$ de réponse à 5% du système et le dépassement relatif D . Relever la valeur numérique de $tr_{5\%}$. Exprimer la valeur de D en pourcentage de la valeur finale atteinte.

B-3-2.3. La courbe $D(m)$ dessinée à la **figure 2** donne, pour un système du second ordre, le dépassement relatif en fonction du coefficient d'amortissement m . Déterminer la valeur du coefficient d'amortissement m pour l'asservissement étudié.

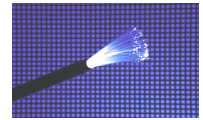


Figure 1

Réponse indicielle en boucle fermée

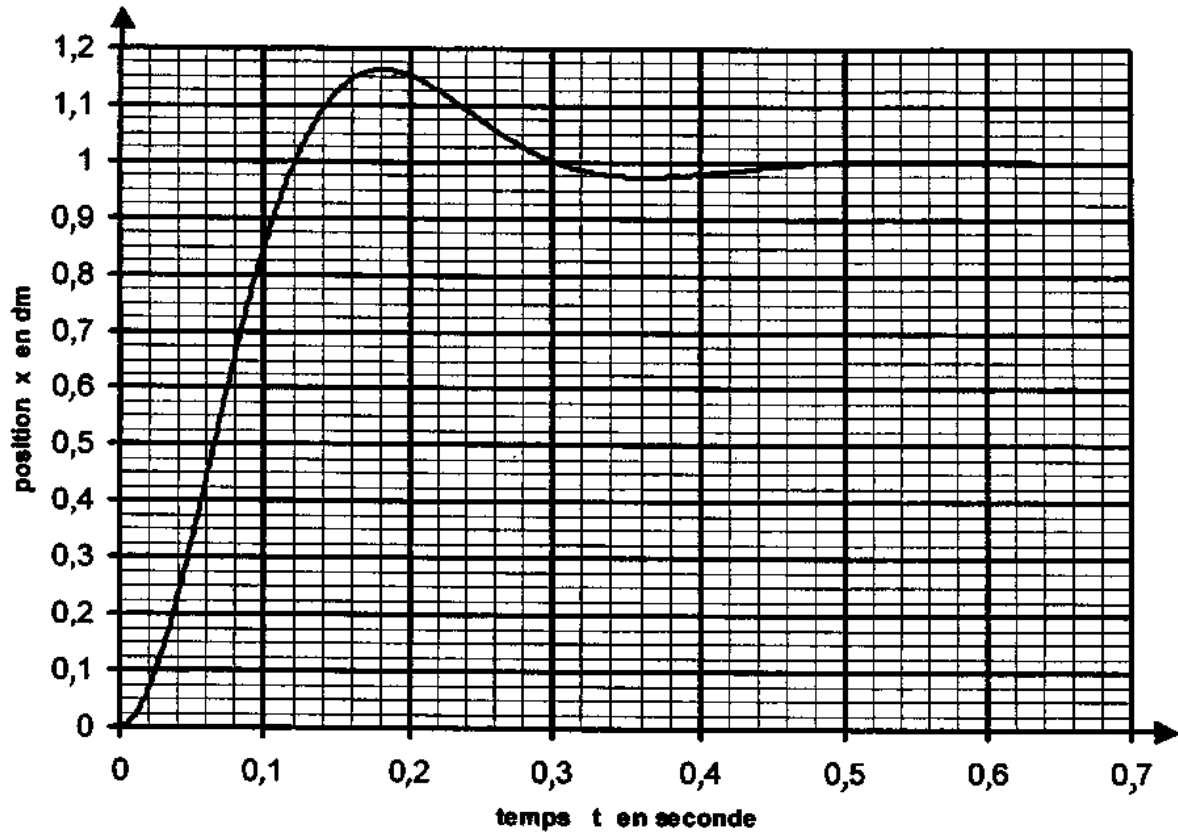
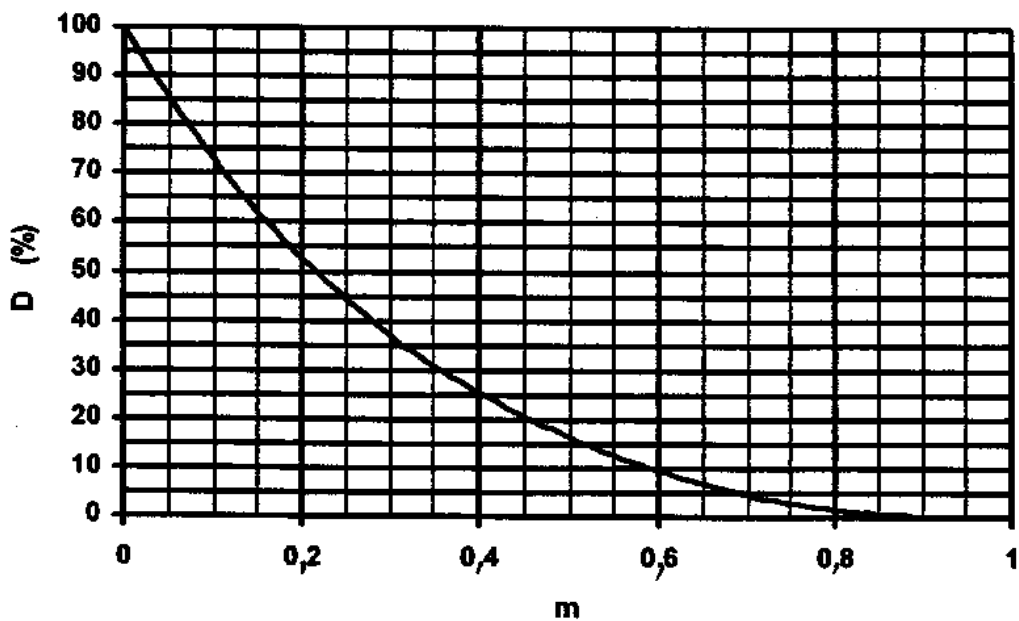
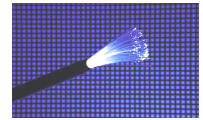


Figure 2

Dépassement D en fonction
du coefficient d'amortissement m

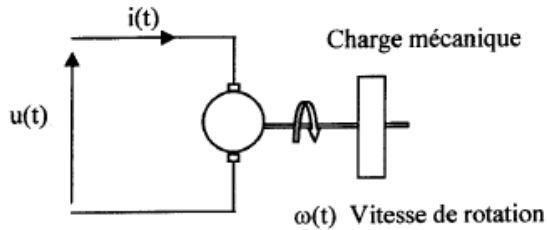




6°) - identification d'un moteur à courant continu (BTS SE 2005).

1. Etude du moteur et de son asservissement

Dans cette partie, on utilisera une modélisation simplifiée du moteur à courant continu. Les caractéristiques du moteur employé, ainsi que les équations du moteur en fonctionnement linéaire, sont rappelées ci-dessous.



Le moteur a les caractéristiques suivantes :

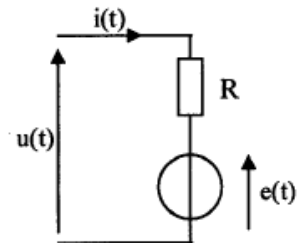
- excitation : aimant permanent ;
- point nominal de fonctionnement : 100 V, 8000 tr.min⁻¹ ;
- moment d'inertie des parties tournantes : $J = 3,50 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$;
- équations du moteur en fonctionnement linéaire :
 $e(t) = k \cdot \omega(t)$; $e(t)$ est la force-électromotrice induite ;
 $\omega(t)$ est la vitesse de rotation en rad.s⁻¹. On notera N la fréquence de rotation exprimée en tr.min⁻¹.
 $c_m(t) = k \cdot i(t)$ avec $k = 0,119 \text{ V} \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 $c_m(t)$ est le moment du couple moteur et $i(t)$ l'intensité du courant dans l'induit
- résistance de l'induit : $R = 1,30 \Omega$; on néglige l'inductance de l'induit.

Dans ces conditions, le schéma électrique de l'induit du moteur est le suivant :

Enfin, on rappelle l'équation fondamentale de la dynamique d'un solide en rotation :

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$c_r(t)$ étant le moment du couple résistant produit par la charge mécanique sur l'arbre du moteur.

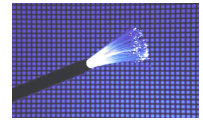


On donne par ailleurs :

- les transformées de LAPLACE suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(t) \text{ (avec } \Gamma(t)=1 \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } \Gamma(t)=0 \text{ si } t < 0) & \longleftrightarrow \frac{1}{p} \\ e^{-at} & \longleftrightarrow \frac{1}{p+a} \\ 1 - e^{-\frac{t}{a}} & \longleftrightarrow \frac{1}{p(1+ap)} \end{aligned}$$

- le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$; $F(p)$ étant la transformée de Laplace de $f(t)$.



1.1 On réalise une étude à vide ($C_r = 0$)

- 1.1.1 En utilisant le modèle électrique équivalent du moteur à courant continu, établir l'équation électrique relative à l'induit.
- 1.1.2 A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, établir une expression entre $\omega(t)$ et le courant $i(t)$.
- 1.1.3 En utilisant les résultats précédents, déterminer l'équation différentielle régissant $\omega(t)$.
- 1.1.4 Résoudre cette équation différentielle et donner une expression de $\omega(t)$, sachant que $u(t)=0$ pour $t<0$ et $u(t)=U_0=100$ V pour $t\geq 0$.
En déduire la valeur de la constante de temps mécanique τ_m du système et la valeur de la fréquence de rotation N_0 en tours par minute du moteur en régime permanent. Cette valeur est-elle cohérente avec les données du moteur ?

Pour la suite du problème, on posera $\tau_m = \frac{R \cdot J}{k^2}$ et on prendra $\tau_m = 3,2$ ms.

- 1.1.5 Donner le temps de réponse à 5%.
- 1.1.6 Tracer le graphe de $N(t)$ en y représentant la tangente à l'origine
- 1.1.7 Calcul de la réponse indicielle du moteur alimenté par un échelon de tension.

On note $U(p)$ et $\Omega(p)$ les transformées de Laplace respectives de $u(t)$ et $\omega(t)$.

En utilisant le résultat de la question 1.1.3, montrer que : $\Omega(p) = \frac{U(p)}{k(1 + \tau_m p)}$

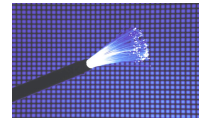
puis, à l'aide de la table des transformées de Laplace, retrouver l'expression de $\omega(t)$ du 1.1.5, sachant que $u(t)$ est un échelon de tension d'amplitude $U_0 = 100$ V.

1.2 Le couple résistant est désormais non nul

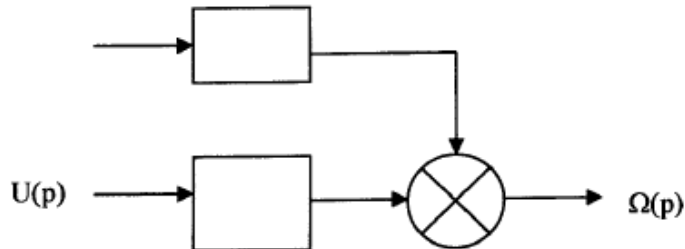
- 1.2.1 Exprimer, dans ce nouveau cas, la relation fondamentale de la dynamique d'un solide en rotation.
- 1.2.2 En utilisant la transformée de Laplace et la relation précédente montrer que $\Omega(p)$ se met sous la forme :

$$\Omega(p) = F(p).U(p) + G(p).C_r(p)$$

et exprimer $F(p)$ et $G(p)$ en fonction de τ_m , R et k .



1.2.3 - Montrer que le système peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-dessous qu'on complètera.



1.2.4 Le moteur tournant à la fréquence de rotation ω_0 , on applique un échelon de couple résistant dont l'amplitude du moment a la valeur $C_{r0} = 1,2 \text{ N.m}$.

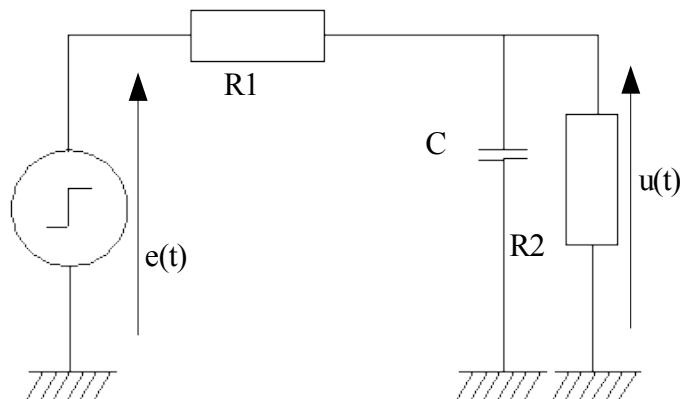
Donner l'expression de la nouvelle vitesse de rotation ω_{0r} du moteur en régime permanent, puis la valeur N_{0r} de la fréquence exprimée en tours par minute et enfin l'écart relatif entre les fréquences de rotation à vide et en charge.

7°) - exos de révision.

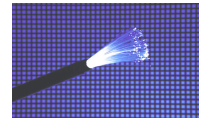
On considère le montage suivant :

Les valeurs des composants sont :

$R1 = 2,2 \text{ k}\Omega$, $R2 = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$.



- Donner l'expression de la fonction de transfert de Laplace $T(p) = U(p) / E(p)$ en utilisant les impédances de Laplace.
- Identifier l'ordre du système et donner le nom et les valeurs numériques des paramètres importants.
- Si $e(t)$ est un échelon de valeur 2 V, exprimer $E(p)$, puis $S(p)$ et en déduire $s(t)$.
- En utilisant $T(p)$, déduire l'équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$. Rappeler la méthode pour résoudre ce type d'équation différentielle et valider la forme de $s(t)$ obtenue précédemment.
- Donner la fonction de transfert complexe si on suppose que $e(t)$ est un signal sinusoïdal.
- Donner l'expression complète de $s(t)$ si $e(t) = 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ avec $f = 2 \text{ kHz}$.
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce système.

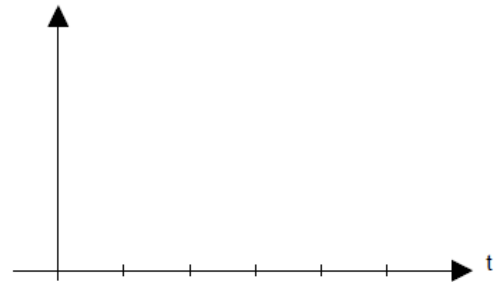


Exercice sur le second ordre :

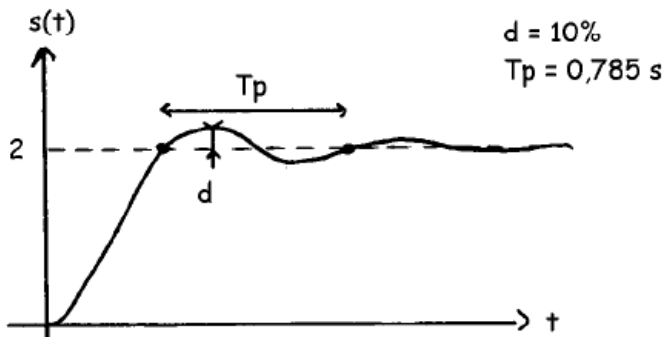
On étudie un système du second ordre dont la transmittance s'écrit :

$$H(p) = \frac{200}{100 + 10p + p^2}$$

- 1) Déterminer les valeurs de la transmittance en continu H_0 , de la pulsation propre et de l'amortissement.
- 2) Tracer avec le minimum de calculs l'allure de sa réponse indicielle et évaluer son temps de réponse à 5%.



7 Le système dont la réponse indicielle est la suivante correspond-il à la transmittance $H(p)$?



$$H(p) = \frac{2}{1 + 0,12p + 0,01p^2}$$

On rappelle la relation entre pulsation propre et la pseudo pulsation :

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-m^2}}$$

- a) l'enregistrement montre que le système a un amortissement de $m = 0,43$
- b) l'enregistrement montre que le système a une amplification en continu $H_0 = 2$
- c) la pseudo-pulsation vaut $\omega_p = 10$ rad/s
- d) la pulsation propre du système a pour valeur $\omega_0 = 10$ rad/s
- e) le système étudié a bien pour transmittance de Laplace la fonction $H(p)$ donnée

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>