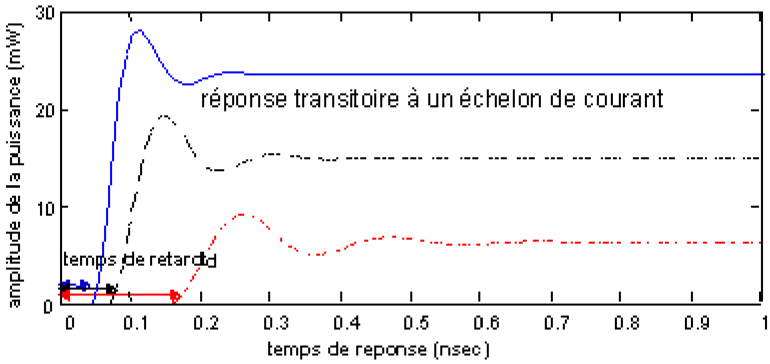
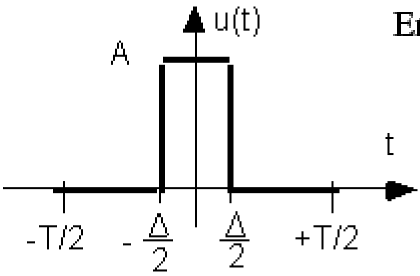
Chapitre 3 : identification d'un circuit à un système du premier ou du second ordre.

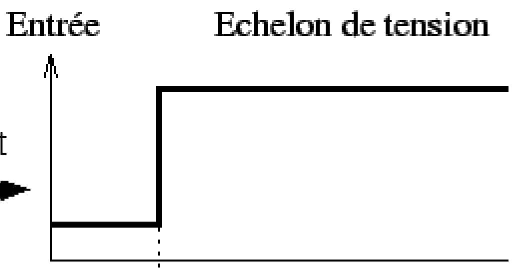
A) généralités :

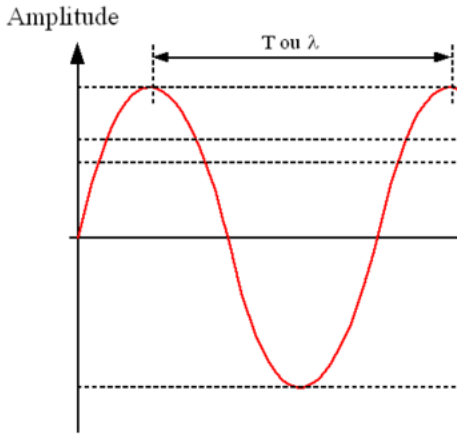
• régime transitoire et permanent :



• type de signaux en entrée des systèmes: :

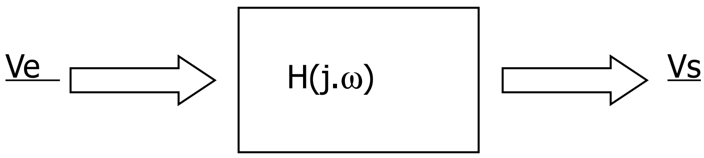






B) Méthodes de représentation des systèmes linéaires :

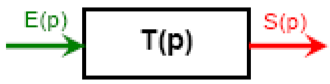
• par schéma bloc en sinusoïdal :



• par une équation différentielle :

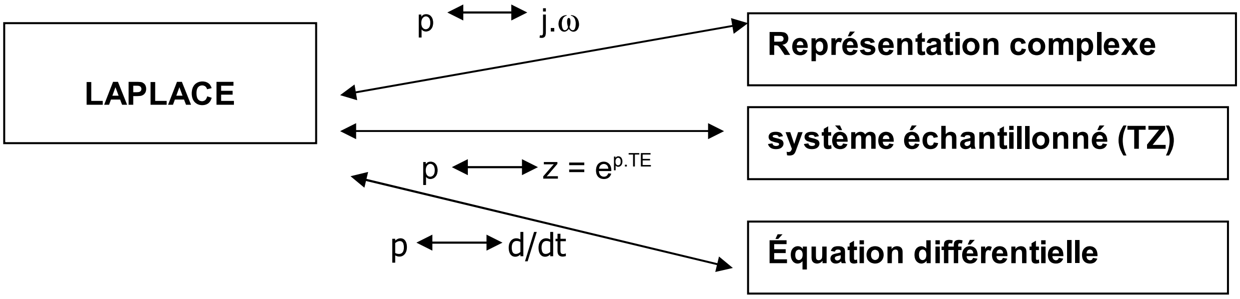
par la représentation de Laplace :

devient



Avec : $S(p) = TL(s(t)) = \int s(t).e^{-pt}.dt$

Intérêts :



Exemple : si on a obtenu une équation différentielle de la forme : $\tau.\frac{dX}{dt} + X(t) = e(t)$

alors la même équation avec les transformées de Laplace est : $\tau.p.X(p) + X(p) = E(p)$

et la relation entre les complexes est : $\tau.(j.\omega).\underline{x} + \underline{x} = \underline{e}$

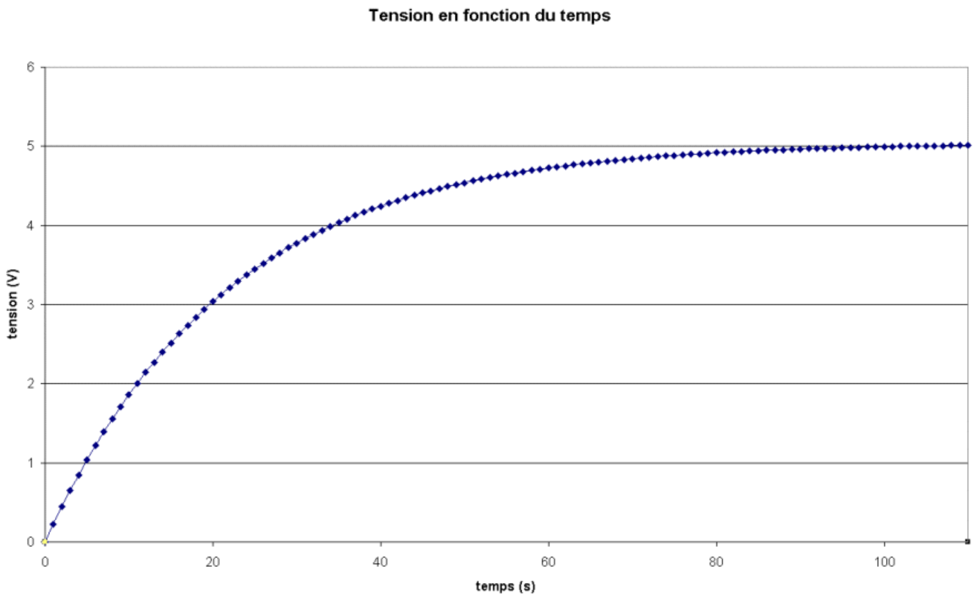
C) systèmes du premier ordre :

- Un système du premier ordre peut être représenté sous la forme : $\tau.\frac{dX}{dt} + X(t) = e(t)$
  - d'une équa. diff. du premier ordre (une seule dérivée), comme
  - d'une fonction de transfert complexe du premier ordre (ω à la puissance 1 dans la fonction de transfert complexe).
  - D'une fonction de transfert de Laplace du premier ordre (p à la puissance 1 au maximum dans la fonction de transfert de Laplace).

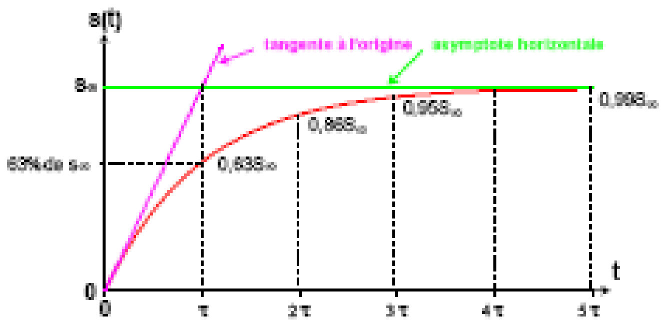
- **Réponse indicielle** : lorsque l'équa.diff. est du type indiqué ci-dessus et que e(t) = E pour t >0, la réponse est exponentielle : $X(t) = E + (X_0 - E) \times \exp(\frac{-t}{\tau})$

  $X_0 = x(t)$ pour t juste avant 0.

Méthodes pour trouver τ :



temps de réponse à x% en fonction de τ :

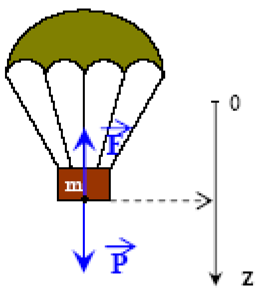


<u>exemples de système du premier ordre :</u>

exemple 1 : circuit RC

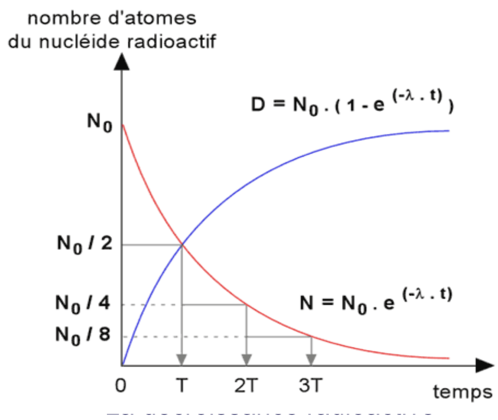
exemple 2 : circuit RL :

exemple 3 : vitesse v d'un parachute :



exemple 4 : décroissance radioactive : Le nombre (dN) de désintégrations nucléaires spontanées qui se produisent dans une quantité donnée de matière, et ce en un temps infiniment petit (dt), est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents (N) ainsi qu'à **la constante radioactive** (λ, en s^{-1}) qui est caractéristique du radio-élément, et enfin, est fonction du temps (dt) :

$$dN = -\lambda . N. dt$$



- **réponse harmonique et fonction de transfert de Laplace :**

Pour le premier ordre, on ne trouve que des filtres passe-bas (exemple du filtre RC) et passe-haut.

La fonction de transfert complexe est donc de la forme : $\underline{H_1} = \dfrac{K}{1+j.(f/f_0)}$ pour un filtre passe-bas ou bien $\underline{H_2} = \dfrac{K.j.(f/f_0)}{1+j.(f/f_0)}$ pour un filtre passe-haut.

Dans les deux cas, f_0 est la fréquence de coupure et K est la transmittance statique pour H1.

Les fonctions de transfert de Laplace seront donc de la forme : $H_1(p) = \dfrac{K}{1+(p/p_0)}$ ou

$$H_2(p) = \frac{K.(p/p_0)}{1+(p/p_0)} = \frac{K}{1+(p_0/p)}$$

- **identification d'un système du premier ordre :** pour caractériser totalement un système du premier ordre, il faut deux paramètres :

  - la constante de temps.
  - la valeur en régime permanent.

D) systèmes du second ordre :

- Un système du second ordre peut être représenté sous la forme :
  - d'une équa. diff. du second ordre (une dérivée seconde), comme par exemple :

$$\frac{d^2X}{dt^2}+2.m.\omega_0\times\frac{dX}{dt}+\omega_0^2\times X(t)=\omega_0^2\times e(t)$$

ω_0 : pulsation propre
m : coefficient d'amortissement.

  - d'une fonction de transfert complexe du second ordre (ω à la puissance 2 dans la fonction de transfert complexe).
  - d'une fonction de transfert de Laplace du second ordre (p à la puissance 2 au maximum dans la fonction de transfert de Laplace).

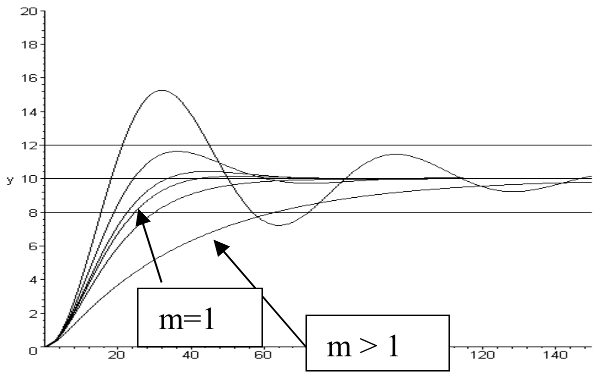
- **Réponse indicielle** : lorsque l'équa.diff. est du type indiqué ci-dessus et que e(t) = E pour t >0, la réponse dépend de la valeur de m :

► **<u>si m > 1</u>** : $X(t) = \left(\lambda_1\times\exp(p_1.t)+\lambda_2\times\exp(p_2.t)\right) + E$

avec p_1 et p_2 les deux racines réelles de l'équation du second degré $x^2 + 2.m.\omega_0.x + \omega_0^2 = 0$

soit : $p_1 = -\omega_0 . (m + \sqrt{m^2-1})$ et $p_2 = -\omega_0 . (m - \sqrt{m^2-1})$

Ce régime est dit apériodique car la réponse est du type :



Il n'y a pas de dépassement et la réponse du système « ressemble » à celle d'un système du 1er ordre, sauf à l'origine où la tangente est horizontale.

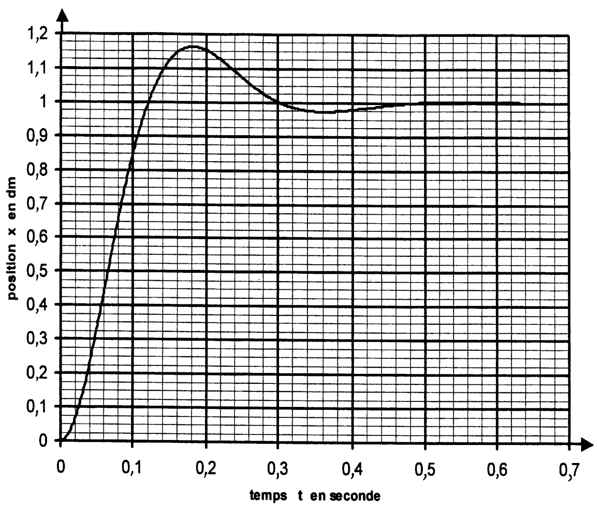
► **<u>si m < 1</u>** : $X(t) = \lambda\times\cos(\omega.t+\varphi)\times\exp(\omega_0.t) + E$

avec ω la pseudo-pulsation du système :

$\omega = \omega_0\times\sqrt{m^2-1}$

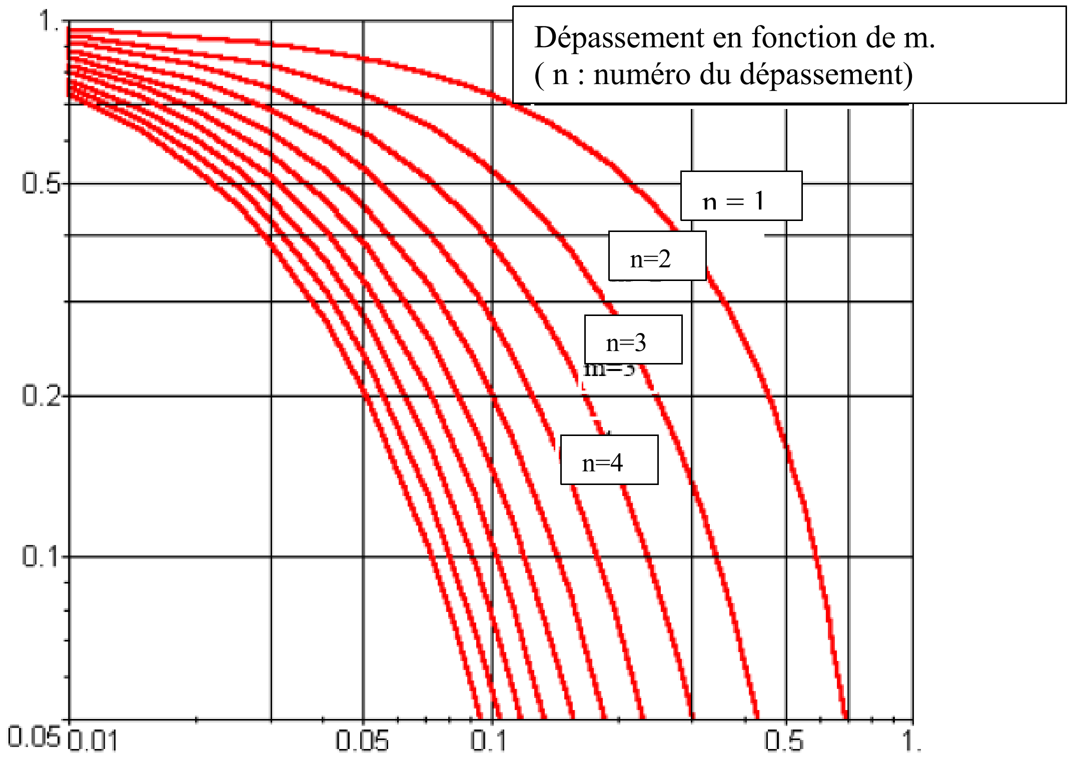
La réponse est oscillatoire amortie
Quelle est la période (dite pseudo-période) de la partie oscillatoire ?
La réponse d'un tel système à un signal échelon est du type :
Sur le chronogramme, indiquer le dépassement et la pseudo-période.

$D\% = \frac{X_{max}-E}{E}$



On démontre théoriquement que : D = $\exp\left(\dfrac{-\pi .m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$ ou que : m = $\dfrac{-\ln(D)}{\sqrt{(\ln(D))^2+\pi^2}}$ mais on utilise des abaques en pratique.

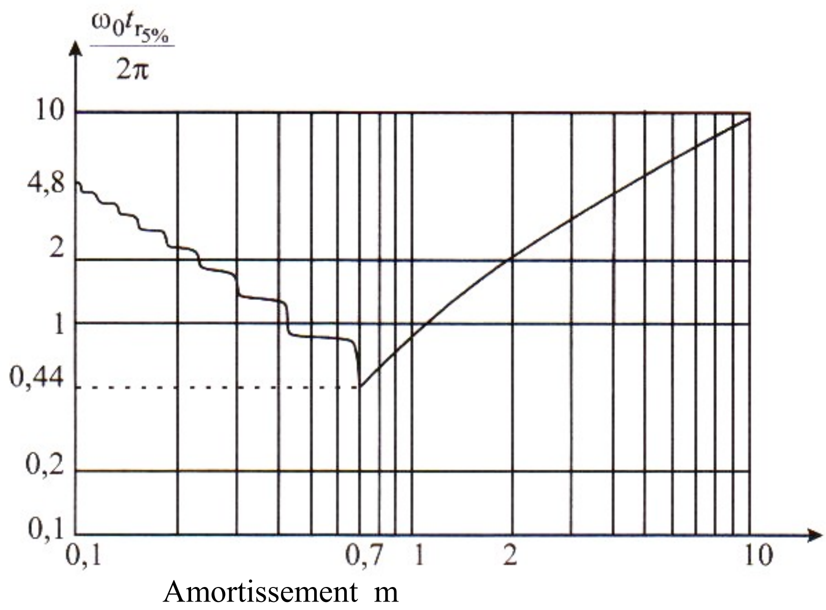
<u>Abaques du dépassement et du temps de réponse à 5% réduit :</u>



Amortissement m entre 0 et 1

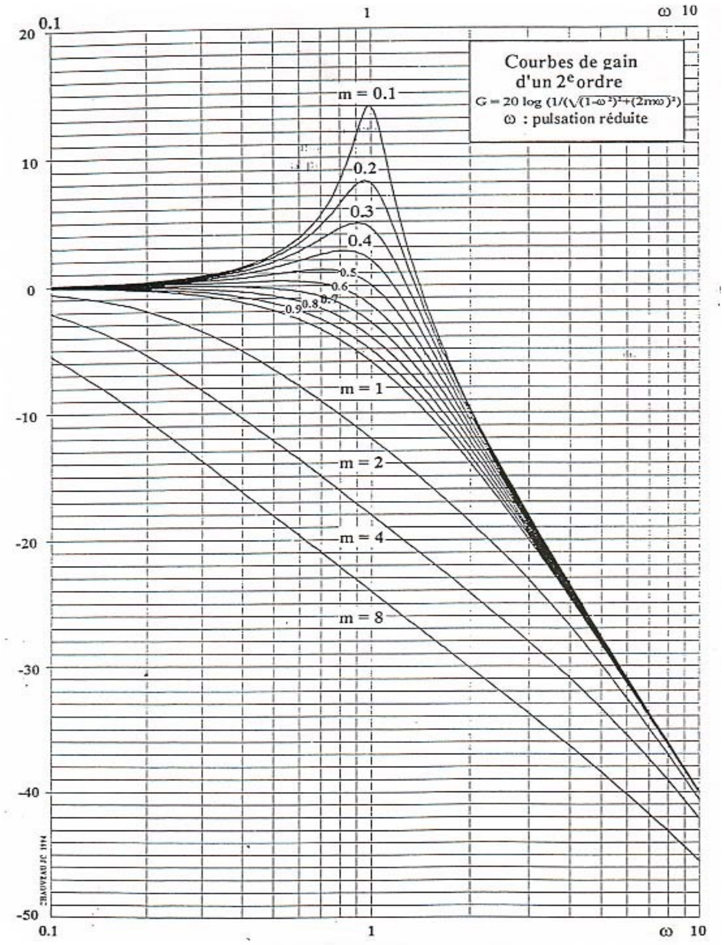
Calculer le dépassement si n = 1 et m = 0,2 .

Abaque du temps de réponse à 5% réduit :



On se rend compte sur ces abaques que le temps de réponse à 5% est minimal pour une valeur m = 0,7.

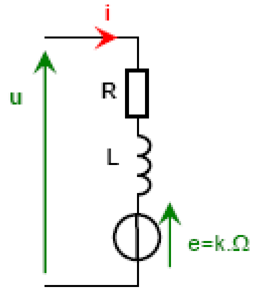
Abaques des diagrammes de Bode en fonction de m :



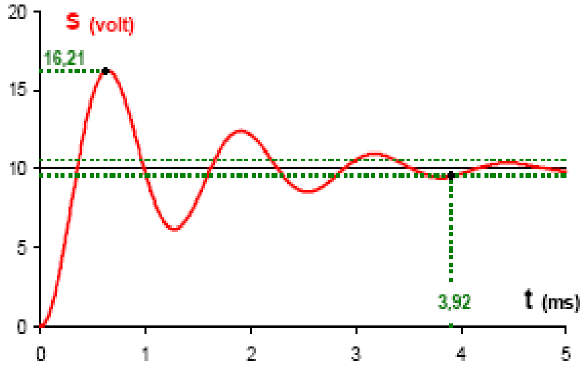
exemples de système du second ordre :

exemple 1 : circuit RLC série :

exemple 2 : moteur à courant continu à aimants permanents et frottements négligés.



pour identifier un système du second ordre :



Transformées de LAPLACE de signaux usuels.

Définition : $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}.f(t).dt =$ ***image*** de f(t)

Propriétés :

$\mathcal{L}\, f(t-T) = e^{-pT}.F(p)$

$\mathcal{L}\, f(t).e^{-at} = F(p+a)$

$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p)$ avec $f(0) = 0$

$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$

$\mathcal{L}\left[\int f(t).dt\right] = \left[\frac{F(p)}{p}\right]$

$\boldsymbol{lim}_{t\to\infty}[f(t)] = \boldsymbol{lim}_{p\to 0}[p.F(p)]$

Table :

F(p)	f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[F(p)]
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ Echelon unité
e^{-Tp}	$\delta(t-T)$ Impulsion retardée
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t-T)$ Echelon retardé
$\frac{1}{p^2}$	$t.u(t)$ Rampe unitaire
$\frac{1}{p^n}$ n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2}te^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$

F(p)	f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[F(p)]
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1-(1+\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1-\frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{p+z\omega_0}{\omega_0^2+2z\omega_0 p+p^2}$	$e^{-z\omega_0 t}\cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-z^2}$
$\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_p t)$
$\frac{1}{p(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$	$1-\frac{\omega_0}{\omega_p}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_p t+\psi)$ avec $\psi=\arccos(\cos z)$

5) Réponse d'un passe-bas du 1er ordre :

La transmittance de Laplace d'un tel système se met sous la forme « standard » :

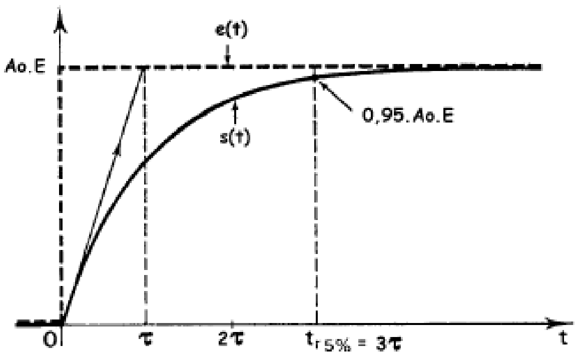
$$T(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}$$ avec

- une amplification statique A_0
- une constante de temps τ
- un seul pôle réel négatif $p_0 = -1/\tau$

⇒ la **transmittance complexe** s'écrit facilement sous une forme standard classique :

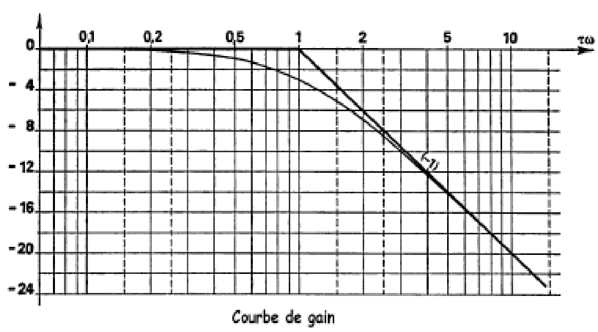
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{A_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$ avec une pulsation de coupure $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$

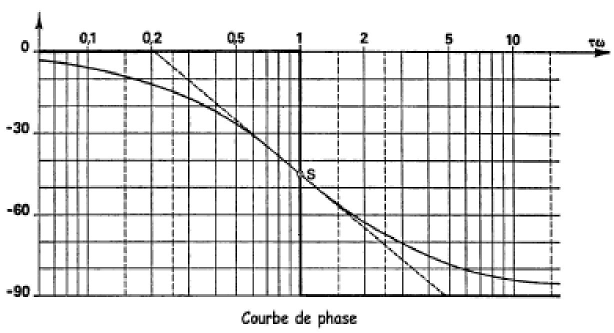
⇒ la **réponse à un échelon** d'amplitude E s'écrit : $s(t)=A_0 E(1-e^{-t/\tau})$



- la tangente à l'origine coupe la valeur finale à t=τ
- à t=τ, la courbe est à 63% de la valeur finale
- le temps de réponse à 5% vaut 3τ

⇒ le **diagramme de Bode** a l'allure classique suivante :





- gain statique $G_0 = 20\log(A_0)$
- cassure à la pulsation ω_0
- pente de –20dB/dec après la cassure

- déphasage nul aux basses-fréquences
- rotation de phase de –90° à la pulsation ω_0

6) Réponse d'un passe-bas du 2ème ordre :

La transmittance de Laplace d'un tel système se met sous la forme « standard » :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

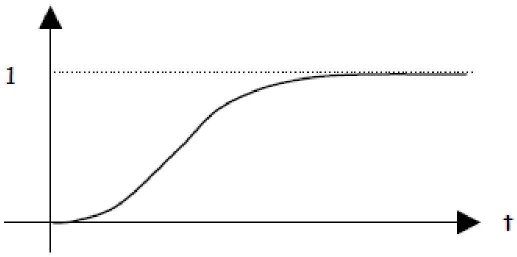
avec

- une amplification statique A_0
- un amortissement m
- une pulsation propre ω_0

Le seul calcul à faire est la mise de la transmittance sous la forme standard pour trouver A_0 , m et ω_0.

⇒ **m > 1** , la transmittance a deux pôles réels p_1 et p_2

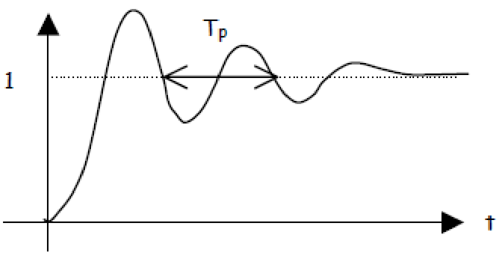
$$T(p) = \frac{A_0}{(1 - \frac{p}{P_1})(1 - \frac{p}{p_2})}$$



- réponse à un échelon lente et sans dépassement
- si m>>1 alors $t_{r5\%} = \frac{3mTo}{\pi}$

⇒ **m < 1** , la transmittance a deux pôles complexes conjugués p_1 et p_2

La transmittance ne peut pas se factoriser, le diagramme de Bode présente une cassure double à ω_0 .



- réponse à un échelon rapide, avec dépassement
- amplitudes des dépassements et temps de réponse donnés par les abaques
- pseudo-période $T_p = \frac{To}{\sqrt{1-m^2}}$

Deux valeurs de m très utiles :

- si **m = 0,7** on a **D = 4%** , le temps de réponse est minimal et vaut $t_{r5\%} = 0{,}45.To$
- si **m = 0,43** on a **D = 20%** , le temps de réponse vaut $t_{r5\%} = 0{,}85.To$

C'est le cas le plus intéressant en pratique, car il correspond à des réponses satisfaisantes.